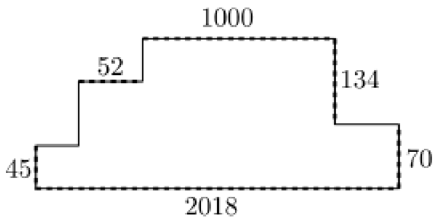
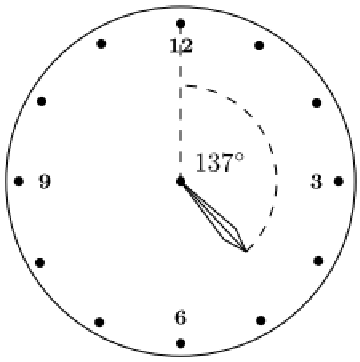
Zadanie 1. Na rysunku widnieje dziesięciokąt, w którym każde dwa sąsiednie boki przecinają się pod kątem prostym. Długości niektórych boków (na rysunku zaznaczonych jako przerywane) są znane i podane (w centymetrach).



Ile wynosi obwód dziesięciokąta w centymetrach?

Zadanie 2. W zegarze brakuje minutowej wskazówki. Ile minut minęło od ostatniej pełnej godziny, jeżeli kąt pomiędzy wskazówką godzinową a godziną dwunastą jest równy $137°$?



Zadanie 3. Kamil, Łukasz, Mikołaj i Natalia pisali egzamin. Otrzymaliśmy informację, że wyniki przez nich uzyskane to, w pewnej kolejności, 2, 12, 86 i 6. Ponadto:

- wynik Kamila był *pampam* niż wynik Mikołaja,
- wynik Mikołaja był *pampam* niż wynik Łukasza,
- wynik Natalii był *pampam* niż wynik Łukasza,
- wynik Kamila był *pampam* niż wynik Natalii,

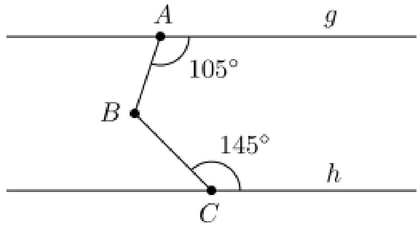
gdzie słowo *pampam* znaczy „mniejszy” lub „większy”, jednak nasz informator zapomniał powiedzieć, które z tłumaczeń jest prawdziwe (wiemy jednak, że wszystkie cztery tłumaczą się tak samo). Oblicz, ile punktów uzyskali łącznie Mikołaj i Natalia.

Zadanie 4. Adam i Andrzej stoją na placu i liczą stojące wokół domy. Każdy z nich liczy domy obracając się zgodnie z ruchem wskazówek zegara, ale zaczynają odliczanie od różnych domów, w związku z czym czwarty dom według Adama jest szesnasty według Andrzeja, a dwunasty według Adama jest siódmy według Andrzeja. Ile domów stoi wokół placu?

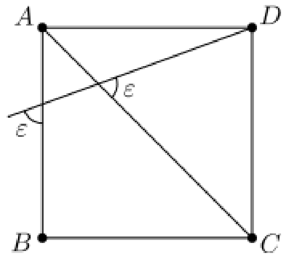
Zadanie 5. Aga chce odkamienić ekspres do kawy. Zgodnie z instrukcją, powinna zmieszać 4 miarki wody z jedną miarką roztworu octu o stężeniu 10%. Niestety ma w kuchni jedynie butelkę z roztworem octu o stężeniu 40%. Z iloma miarkami wody Aga powinna zmieszać jedną miarkę czterdziestoprocentowego roztworu octu, aby uzyskać żądane stężenie octu?

Roztwór octu o stężeniu $n\%$ składa się z n części octu oraz $100 - n$ części wody.

Zadanie 6. Jeśli proste g i h są równoległe oraz miary kątów przy wierzchołkach A i C wynoszą odpowiednio $105°$ i $145°$ jak na rysunku, to jaką miarę ma kąt $\angle CBA$?



Zadanie 7. Jeśli $ABCD$ to kwadrat, to jaka jest miara kąta ε (w stopniach)?



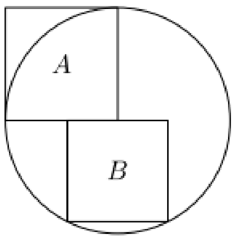
Zadanie 8. Przemek przyszedł na świat w dniu 27. urodzin swojej mamy. Ile co najwyżej razy może się zdarzyć, że wiek Przemka jest taki sam jak wiek jego mamy czytany wspak?

Wiodące zera są pomijane, np. 470 czytane wspak to 74.

Zadanie 9. Ela buduje dużą kostkę o wymiarach $4 \times 4 \times 4$ przy użyciu 32 białych i 32 czarnych sześcianów jednostkowych. Chciałaby, żeby na powierzchni tak uzyskanej kostki znajdowało się jak najwięcej białych ścian sześcianów jednostkowych. Jaka część całej powierzchni kostki będzie biała przy takim ustawieniu?

Zadanie 10. Na eksperymentalną załogową misję na Merkurego zgłosiło się stu ochotników. Wszystkich potencjalnych astronautów poddano ścisłym testom sprawdzającym kondycję, odporność oraz zdrowie psychiczne. Jedynie dwadzieścia sześć osób zaliczyło testy kondycyjne. Ponadto aż sześćdziesięciu ochotników przeszło co najwyżej jeden test. Wiemy także, że na testach odporności i zdrowia psychicznego odnotowano osiemdziesiąt trzy porażki, ale każdy z kandydatów pomyślnie przeszedł co najmniej jeden z tych dwóch testów. Ilu śmiałków uzyskało pozytywny wynik we wszystkich testach?

Zadanie 11. Kwadrat A ma dwa boki pokrywające się z promieniami okręgu, a kwadrat B ma dwa wierzchołki leżące na tym samym okręgu oraz częściowo współdzieli bok z A. Znajdź stosunek pola kwadratu A do pola kwadratu B.



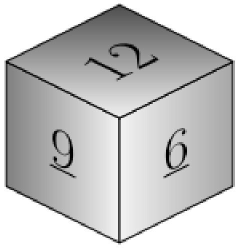
Zadanie 12. Wyznacz dwie ostatnie cyfry (w zapisie dziesiętnym) iloczynu

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37.$$

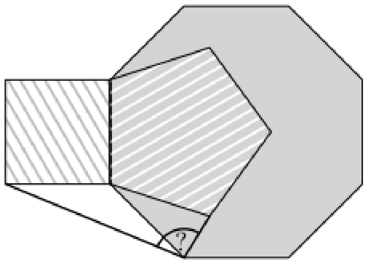
Zadanie 13. Detektyw przesłuchał pięciu z sześciu podejrzanych o popełnienie przestępstwa i okazało się, że mają oni odpowiednio 1, 2, 3, 4 i 5 znajomych wśród pozostałych podejrzanych. Ilu znajomych wśród pozostałych podejrzanych ma ostatni podejrzany?

Znajomość jest relacją symetryczną, tzn. jeśli podejrzany A jest znajomym podejrzanego B, to podejrzany B jest znajomym podejrzanego A.

Zadanie 14. Kostka przedstawiona na rysunku na każdej ściance ma napisaną dodatnią liczbę całkowitą. Ponadto iloczyn liczb na przeciwległych ściankach jest taki sam dla każdej pary takich ścianek. Liczby na ściankach nie muszą być różne. Jaka jest najmniejsza możliwa suma wszystkich liczb napisanych na kostce?



Zadanie 15. Jeżeli szary ośmiokąt i paskowany pięciokąt są foremne, a paskowany czworokąt jest kwadratem, to jaka jest miara zaznaczonego kąta pomiędzy pogrubionymi odcinkami?



Zadanie 16. Minister ma osobistego kierowcę, który codziennie rano wyjeżdża z ministerstwa o ustalonej godzinie, żeby odebrać ministra i zawieźć go do ministerstwa. Minister budzi się każdego dnia o tej samej godzinie, a samochód przyjeżdża po niego dokładnie wtedy, kiedy minister jest gotów do wyjścia. Dziś minister obudził się wcześniej, przez co był gotów godzinę wcześniej niż zazwyczaj. Postanowił więc pójść w kierunku samochodu (który jak zwykle odjeżdża z ministerstwa). Po pewnym czasie spotkał samochód, wsiadł do niego i dotarł do ministerstwa dwadzieścia minut wcześniej niż zazwyczaj. Ile minut szedł minister? Załóż, że samochód porusza się ze stałą szybkością, a czas wsiadania do samochodu jest pomijalnie krótki.

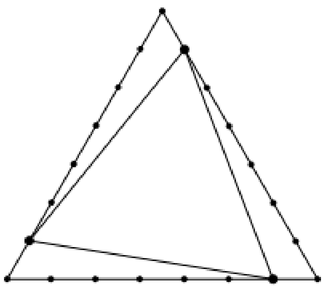
Zadanie 17. Jaka jest najmniejsza dodatnia liczba całkowita o co najmniej dwóch cyfrach, której wartość po usunięciu pierwszej cyfry od lewej jest 29 razy mniejsza?

Zadanie 18. Ile razy w ciągu 24 godzin wskazówka minutowa jest prostopadła do wskazówki godzinowej?

Zadanie 19. Znajdź wszystkie czterocyfrowe palindromy, które mogą być zapisane jako suma dwóch trzycyfrowych palindromów.

Palindrom to liczba, która czytana od lewej i prawej strony jest taka sama, np. 2018102. Liczba nie może zaczynać się od cyfry 0.

Zadanie 20. Boki trójkąta równobocznego podzielono na odcinki będące w stosunku 6 do 1 w taki sposób, że punkty podziału również tworzą wierzchołki trójkąta równobocznego (patrz obrazek). Wyznacz stosunek pola powierzchni mniejszego trójkąta równobocznego do pola powierzchni większego trójkąta równobocznego.



Zadanie 21. Znajdź wszystkie takie czwórki (a, b, c, d) dodatnich liczb całkowitych, że jeśli w tablicy poniżej zamiast tych liter wpiszemy przypisane im odpowiednie wartości liczbowe, wówczas a, b, c, d będą dokładnie liczbą jedynek, dwójek, trójek oraz odpowiednio czwórek w poniższej tablicy.

1	2	3	4
a	b	c	d

Zadanie 22. Piotrek zapomniał swojego hasła. Pamięta tylko, że składało się ono z 9 małych liter alfabetu łacińskiego oraz zawierało angielskie słowa „math" i „drama". Ile różnych haseł spełnia te warunki?

Słowa są zawarte jako spójne podciągi, czyli na przykład „martha" nie zawiera słowa „math". Alfabet łaciński ma 26 liter.

Zadanie 23. Jeśli wylosujemy dwie różne liczby ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, n-1, n\}$, to prawdopodobieństwo, że wylosowane liczby będą kolejnymi dodatnimi liczbami całkowitymi wynosi $\frac{1}{21}$. Wyznacz n.

Zadanie 24. Apoloniusz, Bonifacy i Czesław grali w tenisa stołowego według następujących reguł: w każdej rundzie dwóch z nich grało przeciwko sobie, a trzeci odpoczywał. Zwycięzca rundy grał następnie z uprzednio odpoczywającym zawodnikiem. W pierwszej rundzie Apoloniusz grał przeciwko Bonifacemu. Po pewnej liczbie rund Apoloniusz miał na swoim koncie 17 wygranych, a Bonifacy 22. Ile razy Apoloniusz i Bonifacy grali przeciwko sobie?

Zadanie 25. Klienci sklepu internetowego mogą wyrazić swoją satysfakcję z zamówionego produktu oceniając go w skali od jednej do pięciu gwiazdek (1 gwiazdka = słaby, 5 gwiazdek = świetny). Średnia ocena nowego smartfona jeszcze w ubiegłym tygodniu wynosiła 3.46, ale po oddaniu przez kolejne dwie osoby głosów w obecnym tygodniu, średnia zwiększyła się do 3.5 gwiazdki. Ile osób jak dotąd oceniło nowego smartfona?

Zadanie 26. Dorota ma cztery pary skarpetek odpowiednio z napisami *poniedziałek*, *wtorek*, *środa*, *czwartek*. Na ile sposobów może je nosić od poniedziałku do czwartku, aby każdego dnia obie skarpetki były różne i na żadnej nie była napisana nazwa obecnego dnia?

Każda skarpetka pasuje na każdą nogę (nie ma „lewych" i „prawych" skarpetek). Co więcej, noszenie jednej skarpetki na lewej nodze i innej na prawej liczy się jako ten sam sposób noszenia, co noszenie ich odwrotnie.

Zadanie 27. Komisja składająca się z 26 matematyków nominuje (co najmniej) pięć filmów do nagrody na festiwalu filmów matematycznych. Wybierają spośród 16 filmów w następujący sposób: Każdy członek komisji wybiera pięć różnych filmów i nominowanych zostaje pięć filmów z największą liczbą głosów; w przypadku remisu na piątym miejscu, nominowane zostają wszystkie filmy zajmujące to miejsce. Jaka jest najmniejsza liczba głosów, jaką musi otrzymać dany film, żeby został nominowany niezależnie od głosów na pozostałe filmy?

Zadanie 28. Funkcja rzeczywista f spełnia równanie

$$f(x) + xf(1-x) = x$$

dla każdej liczby rzeczywistej x. Znajdź $f(-2)$.

Zadanie 29. Liczby dwucyfrowe n, a, b, o, j wybrano w taki sposób, że ich iloczyn $naboj$ jest podzielny przez 4420. Znajdź największą możliwą wartość sumy $n + a + b + o + j$.

Zadanie 30. Ewelina zamówiła przez internet osiem piłek tenisowych i jedną piłkę ręczną. Piłki (z których każda ma kształt idealnej kuli) zostały zapakowane do sześciennego pudełka w taki sposób, że każda piłka tenisowa jest styczna do trzech ścian pudełka i do piłki ręcznej. Promień piłki ręcznej wynosi 10 cm, a promień piłki tenisowej wynosi 5 cm. Wyznacz długość krawędzi pudełka (w centymetrach).

Zadanie 31. Zapisana w systemie dziesiętnym potęga 2^{29} jest dziewięciocyfrową liczbą, której wszystkie cyfry są różne. Jakiej cyfry nie użyto w tym zapisie?

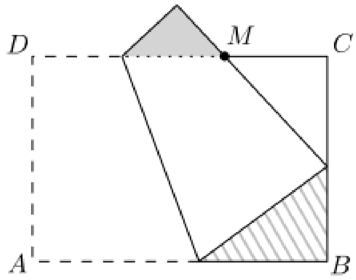
Zadanie 32. Podczas porządkowania strychu, Zbyszek znalazł stary kalkulator, który potrafi obliczać pierwiastki kwadratowe, jednak jego wyświetlacz pokazuje tylko dwie cyfry po przecinku. Przykładowo, dla $\sqrt{4}$ urządzenie pokaże 2.00, a dla $\sqrt{6} = 2.44949\ldots$ będzie to 2.44. Jaka jest najmniejsza dodatnia liczba całkowita, nie będąca kwadratem liczby całkowitej, której pierwiastek kalkulator Zbyszka wyświetli z dwoma zerami po przecinku?

Zadanie 33. W każde z pól tablicy 2018×2018 należy wpisać jedną z liczb od 1 do 9 w taki sposób, żeby suma liczb znajdujących się wewnątrz każdego kwadratu 3×3 była podzielna przez 9. Na ile różnych sposobów można to uczynić?

Zadanie 34. Znajdź wszystkie pary (n, m) dodatnich liczb całkowitych, które spełniają równanie $4^n + 260 = m^2$.

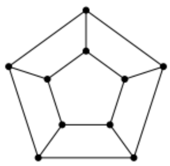
Zadanie 35. W trójkącie równobocznym ABC promień światła wychodzący z punktu B padł na bok AC w takim punkcie D, że $DC : AC = 1 : 2018$, odbijając się od niego zgodnie z zasadą, że kąt padania jest równy kątowi odbicia. Następnie odbijał się podobnie za każdym razem, gdy dotarł do jakiegoś boku trójkąta. Oblicz, ile było w sumie odbić, zanim promień dotarł do pewnego wierzchołka trójkąta ABC.

Zadanie 36. Prostokątna kartka papieru $ABCD$ została złożona tak, że wyjściowy punkt A znalazł się na boku BC, a punkt M będący przecięciem boku CD i wyjściowego boku AD był dokładnie w jednej trzeciej długości boku CD, tj. $CD = 3CM$. Jeżeli pole szarego trójkąta jest równe 1, to jakie jest pole paskowanego?

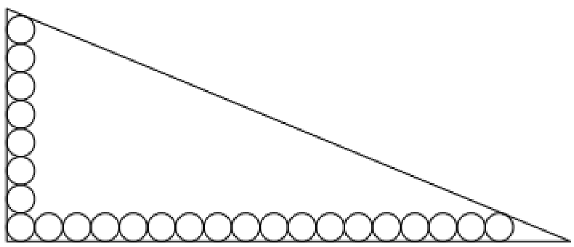


Zadanie 37. Po podzieleniu wielomianu $x^3 + x^5 + x^7 + x^9 + x^{11} + x^{2017} + x^{2018}$ przez $x^2 - 1$ otrzymujemy resztę. Znajdź wartość zmiennej x, dla której ta reszta jest równa 1111.

Zadanie 38. W Pentagonii znajduje się dziesięć miast. Każde z nich połączone jest liniami kolejowymi z trzema innymi, zgodnie z poniższym diagramem. Polityka nieufności wymaga, żeby każde dwie linie mające wspólną stację należały do różnych przewoźników. Na ile sposobów można przyporządkować linie trzem przewoźnikom, aby prawo nie zostało złamane?



Zadanie 39. Trójkąt prostokątny zawiera 25 stycznych okręgów o promieniu 1, jak pokazano na rysunku.



Ile wynosi promień okręgu wpisanego w ten trójkąt?

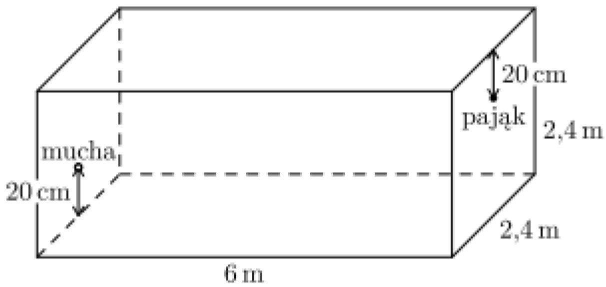
Zadanie 40. Madzia wymyśliła operację o nazwie *madzing*, działającą na (skończonych) ciągach liczb całkowitych. Mając dany ciąg bierze jego cztery kopie, zwiększa ich wyrazy kolejno o 0, 2, 3 i 5 oraz łączy ciągi, otrzymując znów pojedynczy ciąg. Na przykład, mając dany ciąg $(8, 3)$ otrzyma $(8, 3, 10, 5, 11, 6, 13, 8)$. Jeżeli Madzia zacznie od jednoelementowego ciągu (0) i będzie wykonywać operację madzingu dopóki nie otrzyma co najmniej 2018 liczb, to jaka będzie liczba 2018-ta? (Wyraz najbardziej na lewo jest uznawany za pierwszy).

Zadanie 41. Wyznacz najmniejszą dodatnią liczbę całkowitą n taką, że równanie

$$(x^2 + y^2)^2 + 2nx(x^2 + y^2) = n^2y^2$$

ma rozwiązanie (x, y) w dodatnich liczbach całkowitych.

Zadanie 42. W prostopadłościennym pokoju o wymiarach $6\,\mathrm{m} \times 2.4\,\mathrm{m} \times 2.4\,\mathrm{m}$ (długość $\times$ szerokość $\times$ wysokość) znajduje się pająk. Siedzi on na jednej ze ścian o wymiarach $2.4\,\mathrm{m} \times 2.4\,\mathrm{m}$, $20\,\mathrm{cm}$ od sufitu i w jednakowej odległości od jej pionowych krawędzi. Mucha, siedząca na przeciwległej ścianie, także znajduje się na jej pionowej osi symetrii, ale $20\,\mathrm{cm}$ od podłogi. Mucha nie porusza się, natomiast pająk przemieszcza się po ścianach celem złapania jej. Jaka jest najmniejsza odległość (w m), którą musi on pokonać?



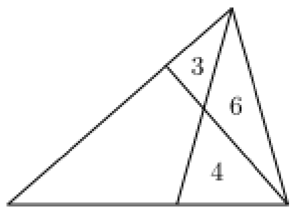
Zadanie 43. Znajdź najmniejszą możliwą wartość wyrażenia

$$(6 + 2\cos(x) - \cos(y))^2 + (8 + 2\sin(x) - \sin(y))^2,$$

gdzie $x, y \in \mathbb{R}$.

Zadanie 44. Jaka jest najmniejsza dodatnia liczba całkowita o tej własności, że jej cyfrą jedności jest 2, oraz jeśli tę ostatnią cyfrę przeniesiemy przed jej pierwszą cyfrę, to dostaniemy podwojenie wyjściowej liczby?

Zadanie 45. Dariusz podzielił trójkątny obszar ziemi dwiema liniami na cztery działki. Obszar o polu 6 podarował swojemu synowi Filipowi, o polu 4 oddał swojemu synowi Piotrowi, a najmniejszy o polu 3 przekazał swojemu synowi Mikołajowi. Sam zatrzymał największą działkę. Ile wynosi jej pole?



Zadanie 46. Czterej bracia posiadają w sumie 2018 zł oszczędności. Wiemy, że majątek każdego z nich jest dodatnią liczbą całkowitą, a żadnych dwóch nie posiada takiej samej liczby złotówek. Ponadto, jeśli jeden brat jest bogatszy od drugiego, to jego majątek jest podzielny przez majątek biedniejszego. Ile co najmniej złotówek musi mieć najbogatszy z braci?

Zadanie 47. Andrzej narysował na tablicy symbol ♣. Potem trzynaście razy powtórzył procedurę polegającą na starciu tablicy i zapisaniu nowego ciągu symboli, w którym każdy symbol ♡ jest zastąpiony parą ♣♡, a każdy symbol ♣ jest zastąpiony parą ♡♣. Przykładowo, w wyniku wykonania tej procedury ciąg ♣♡♡ zostałby zastąpiony ciągiem ♡♣♣♡♣♡. Ile par ♡♡ (bez żadnego innego symbolu pomiędzy) będzie się znajdowało na tablicy po wykonaniu wszystkich operacji? Liczone pary mogą się nakładać, przykładowo w ciągu ♡♡♡♡ są trzy pary ♡♡.

Zadanie 48. Dziewięciokąt foremny $ABCDEFGHI$ jest wpisany w okrąg ϱ o środku w O. Niech M będzie środkiem (krótszego) łuku AB okręgu ϱ, P środkiem odcinka MO, a N środkiem odcinka BC. Niech proste OC i PN przecinają się w punkcie Q. Ile wynosi miara kąta $\angle NQC$ (w stopniach)?

Zadanie 49. Anna wybrała trzy dodatnie liczby całkowite x, y, z, sumujące się do 2018, oraz powiedziała x Xenie, y Yenie, a z Zenie. Żadna z tej trójki nie znała pozostałych dwóch liczb, ale wszystkie wiedziały, że $x + y + z = 2018$. Wywiązała się między nimi następująca konwersacja (zakładamy, że nikt nie kłamał):

- Xena: Wiem, że Yena i Zena usłyszały różne liczby.
- Yena: Aha, dzięki tej informacji jestem pewna, że wszystkie trzy usłyszałyśmy różne liczby!
- Zena: W takim razie teraz wiem, co każda z nas usłyszała.

Wyznacz trójkę (x, y, z).

Zadanie 50. Czarodzieje Arytmetyk i Kombinatoryka rywalizują ze sobą w pojedynku. Każde z nich ma 100 punktów siły (PS). Zaklęcie Arytmetyka trafia Kombinatorykę z prawdopodobieństwem 90% i w przypadku sukcesu zabiera 60 PS. Zaklęcie Kombinatoryki jest skuteczne w 60% przypadków, ale zabiera 130 PS. Czarodzieje rzucają zaklęcia na zmianę; Arytmetyk zaczyna. Pojedynek kończy się, gdy jeden z uczestników straci wszystkie punkty siły. Drugi z nich zostaje wtedy zwycięzcą. Wyznacz prawdopodobieństwo wygranej Arytmetyka.

Zadanie 51. Niech $a(1), a(2), \ldots, a(n), \ldots$ będzie rosnącym ciągiem dodatnich liczb całkowitych spełniającym zależność $a(a(n)) = 3n$ dla każdej dodatniej liczby całkowitej n. Wyznacz $a(2018)$.
Ciąg jest *rosnący* jeśli $a(m) < a(n)$ dla $m < n$.

Zadanie 52. Trójkąt równoboczny T o boku długości 2018 jest podzielony na 2018^2 małych trójkątów równobocznych o boku długości 1. Zbiór M wierzchołków tych małych trójkątów nazwiemy *niezależnym*, jeżeli dla każdych dwóch różnych punktów $A, B \in M$ odcinek AB nie jest równoległy do żadnego z boków trójkąta T. Jaka jest największa możliwa liczba elementów zbioru niezależnego?

Zadanie 53. Niech ABC będzie trójkątem, w którym $AB = 5$, $AC = 6$, a ω będzie okręgiem opisanym na tym trójkącie. Niech ponadto F i G będą takimi punktami odcinka AC, że $AF = 1$, $FG = 3$, $GC = 2$ oraz niech D i E będą różnymi od B punktami przecięcia odpowiednio prostych BF i BG z okręgiem ω. Jaką długość ma odcinek BC jeśli wiadomo, że proste AC i DE są równoległe?

Zadanie 54. Wiadomo, że

$$2^{22000} = \underbrace{4569878\ldots229376}_{6623 \text{ cyfry}}.$$

Dla ilu dodatnich liczb całkowitych $n < 22000$ pierwszą cyfrą liczby 2^n również jest 4?

Zadanie 55. Wyznacz liczby wymierne a, b, c o tej własności, że

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{2} - 1} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}.$$

Liczba wymierna to iloraz dwóch liczb całkowitych.