V Irańska Olimpiada Geometryczna

Poziom średniozaawansowany

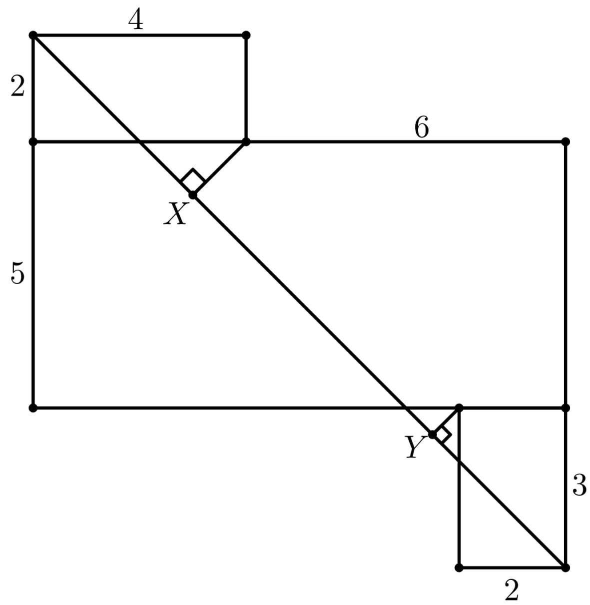
Czwartek, 6 września, 2018r.

Zabronione jest rozpowszechnianie poniższych zadań do momentu gdy będą one opublikowane na oficjalnej stronie IGO:

http://igo-official.ir .

---

1 Dane są trzy prostokąty na rysunku poniżej. Długości pewnych odcinków są pokazane. Znajdź długość odcinka XY.



2 Przekątne AC i BD czworokąta wypukłego $ABCD$ przecinają się w punkcie P. Wiemy, że $\angle DAC = 90°$ oraz $2\angle ADB = \angle ACB$. Jeśli mamy $\angle DBC + 2\angle ADC = 180°$, udowodnij, że $2AP = BP$.

3 Punkty O_1 i O_2 są środkami okręgów odpowiednio ω_1 i ω_2. Te dwa okręgi przecinają się w punktach A i B. Prosta O_1B przecina okrąg ω_2 po raz drugi w punkcie C, a prosta O_2A przecina okrąg ω_1 po raz drugi w punkcie D. Niech X będzie drugim punktem przecięcia AC z ω_1. Podobnie Y niech będzie drugim punktem przecięcia BD z ω_2. Udowodnić, że $CX = DY$.

4 Dany jest wielościan, którego wszystkie ściany są trójkątami. Niech P będzie dowolnym punktem na jednej z krawędzi tego wielościanu takim, że P nie jest środkiem ani końcem tej krawędzi. Załóżmy, że $P_0 = P$. W każdym ruchu łączymy P_i z środkiem ciężkości jednej ze ścian zawierających punkt P_i. Ta prosta przecina obwód tej ściany ponownie w punkcie P_{i+1}. Kontynuujemy

ten proces z P_{i+1} i inną ścianą zawierającą P_{i+1}. Udowodnić, że poprzez kontynuowanie tego procesu nie możemy przejść przez wszystkie ściany tego wielościanu. (Środek ciężkości trójkąta to punkt przecięcia się jego środkowych.)

5 Niech $ABCD$ jest równoległobokiem, w którym $\angle DAC = 90°$. Niech H będzie spodkiem wysokości opuszczonej z A na DC oraz niech P będzie punktem na prostej AC takim, że prosta PD jest styczna do okręgu opisanego na trójkącie ABD. Udowodnić, że $\angle PBA = \angle DBH$.

Czas: 4 godziny i 30 minut.
Za każde zadanie można uzyskać maksymalnie 8 punktów.