V Irańska Olimpiada Geometryczna

Poziom zaawansowany

Czwartek, 6 września, 2018r.

Zabronione jest rozpowszechnianie poniższych zadań do momentu gdy będą one opublikowane na oficjalnej stronie IGO:

http://igo-official.ir .

---

1 Dwa okręgi ω_1, ω_2 przecinają się w punktach A i B. Prosta PQ jest wspólną styczną tych okręgów, przy czym $P \in \omega_1$ i $Q \in \omega_2$. Niech X będzie dowolnym punktem na okręgu ω_1. Prosta AX przecina ω_2 po raz drugi w punkcie Y. Punkt $Y' \neq Y$ leży na okręgu ω_2, przy czym $QY = QY'$. Prosta $Y'B$ przecina okrąg ω_1 po raz drugi w punkcie X'. Udowodnić, że $PX = PX'$.

2 W trójkącie ostrokątnym ABC mamy $\angle A = 45°$. Punkty O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC, a punkt H jest jego ortocentrum. Punkt D jest spodkiem wysokości trójkąta ABC opuszczonej z punktu B. Punkt X jest środkiem łuku AH okręgu opisanego na trójkącie ADH, zawierającego punkt D. Udowodnić, że $DX = DO$.

3 Znajdź wszystkie liczby całkowite $n > 3$ takie, że istnieje wypukły n-kąt, w którym każda przekątna jest symetralną przynajmniej jednej innej przekątnej.

4 Czworokąt $ABCD$ jest opisany na okręgu. Przekątne AC i BD nie są prostopadłe. Dwusieczne kątów pomiędzy przekątnymi przecinają odcinki AB, BC, CD i DA odpowiednio w punktach K, L, M i N. Wiedząc, że na czworokącie $KLMN$ da się opisać okrąg, udowodnij, że na czworokącie $ABCD$ również da się opisać okrąg.

5 Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Okrąg przechodzący przez punkty A i B jest styczny do odcinka CD w punkcie E. Inny okrąg przechodzący przez punkty C i D jest styczny do odcinka AB w punkcie F. Punkt G jest punktem przecięcia AE i DF oraz punkt H jest punktem przecięcia BE i CF. Udowodnić, że środki okręgów wpisanych w trójkąty AGF, BHF, CHE i DGE leżą na jednym okręgu.

Czas: 4 godziny i 30 minut.

Za każde zadanie można uzyskać maksymalnie 8 punktów.