

**9<sup>TH</sup> EUROPEAN MATHEMATICAL CUP**  
12<sup>th</sup> December 2020 - 20<sup>th</sup> December 2020  
Junior Category



**Problem 1.** Dany jest trójkąt ostrokątny  $ABC$ . Punkty  $D$  i  $E$  są środkami boków (odpowiednio)  $AB$  i  $AC$ . Niech  $F$  będzie takim punktem, że  $D$  jest środkiem odcinka  $EF$ . Niech  $\Gamma$  będzie okręgiem opisanym na trójkącie  $FDB$ .  $G$  jest takim punktem na odcinku  $CD$ , że środek odcinka  $BG$  leży na okręgu  $\Gamma$ . Niech  $H$  będzie drugim punktem przecięcia  $\Gamma$  i  $FC$ . Wykazać, że na czworokącie  $BHGC$  można opisać okrąg.

(Art Waeterschoot)

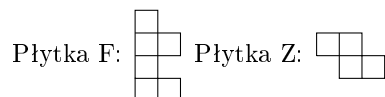
**Problem 2.** Liczbę całkowitą  $k \geq 3$  nazwiemy *śmieszna*, jeżeli istnieje dodatnia liczba całkowita  $n$  oraz dodatnie liczby całkowite  $d_1 < d_2 < \dots < d_k$  o następujących własnościach:

- $d_{j+2} = d_{j+1} + d_j$  dla każdego  $j$  spełniającego nierówności  $1 \leq j \leq k-2$ ,
- $d_1, d_2, \dots, d_k$  są dzielnikami  $n$ ,
- każdy inny dzielnik  $n$  jest mniejszy niż  $d_1$  lub większy niż  $d_k$ .

Wyznaczyć wszystkie liczby śmieszne.

(Ivan Novak)

**Problem 3.** Dane są dwa rodzaje płytek przedstawione poniżej:



Wyznacz wszystkie liczby całkowite dodatnie  $n$ , takie że tablica  $n \times n$  złożona z  $n^2$  kwadratów jednostkowych może być pokryta bez przerw tymi dwoma typami płytek (płytki można obracać i korzystać z ich odbić lustrzanych), w taki sposób, że żadne dwie płytki na siebie nie nachodzą i żadna płytka nie wychodzi poza tablicę.

(Art Waeterschoot)

**Problem 4.** Niech  $a, b, c$  będą takimi dodatnimi liczbami rzeczywistymi, że  $ab + bc + ac = a + b + c$ . Udowodnić następującą nierówność:

$$\sqrt{a + \frac{b}{c}} + \sqrt{b + \frac{c}{a}} + \sqrt{c + \frac{a}{b}} \leq \sqrt{2} \cdot \min \left\{ \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}, \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \right\}.$$

(Dorlir Ahmeti)

Czas trwania zawodów: 240 minut.

Za każde zadanie można otrzymać 10 punktów.

Używanie kalkulatorów i innych przyrządów poza linijkami i cyrklem jest zabronione.